

Crescimento individual em ambiente aleatório: Várias trajectórias**Patrícia A. Filipe***Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Universidade de Évora*
pasf@uevora.pt**Carlos A. Braumann***Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Universidade de Évora*
braumann@uevora.pt**Carlos J. Roquete***Instituto de Ciências Agrárias Mediterrânicas, Universidade de Évora*
croquete@uevora.pt

Resumo: Os modelos usados para o crescimento individual de animais em termos do tamanho $X(t)$ no instante t têm geralmente a forma $(dY(t)/dt) = b(A - Y(t))$, $Y(0) = y_0$, onde se fez a mudança de variável $Y(t) = g(X(t))$ com g estritamente crescente. Aqui A representa o tamanho assintótico do animal. No caso de haver flutuações aleatórias do ambiente, considerámos o modelo $dY(t) = b(A - Y(t))dt + \sigma dW(t)$, onde σ mede a intensidade das flutuações e $W(t)$ é um processo de Wiener padrão. Num trabalho anterior aplicámos o modelo ao crescimento de bovinos mertolengos da estirpe rosilho e estudámos os problemas de estimação e de previsão para uma trajectória. Aqui vamos estudar a extensão a várias trajectórias. Considerámos o caso do modelo de Bertalanffy-Richards ($g(x) = x^c$ com $c > 0$) e do modelo de Gompertz ($g(x) = \ln x$). Foram também utilizados métodos bootstrap para estudar o problema de estimação. Ilustramos com uma aplicação a dados de bovinos.

Palavras-chave: Modelos de crescimento, equações diferenciais estocásticas, estimação, peso de bovinos.

Abstract: The models used for the individual growth of animals in terms of the size $X(t)$ at instant t usually take the form $(dY(t)/dt) = b(A - Y(t))$, $Y(0) = y_0$, where we made a change of variable $Y(t) = g(X(t))$ with g strictly increasing. Here A represents the asymptotic size of the animal. If we take into account the effect of environmental random fluctuations on the growth process, we have considered the model $dY(t) = b(A - Y(t))dt + \sigma dW(t)$, where σ measures the fluctuations intensity and $W(t)$ is a standard Wiener process. In an earlier work we have applied the model to the growth of mertolengo cattle of the rosilho strand and studied the estimation and prediction problems for a single path. Here we studied the extension to several paths. We have considered Bertalanffy-Richards model ($g(x) = x^c$ with $c > 0$) and the Gompertz model ($g(x) = \ln x$). We also used bootstrap methods to study the estimation problem. Results and methods are illustrated using bovine growth data.

Keywords: Growth models, stochastic differential equations, estimation, cattle weight.

1 Introdução

Pretendemos estudar modelos para o crescimento individual de organismos, considerando os efeitos das flutuações aleatórias do ambiente. Na secção 2 apresentamos os modelos de crescimento individual, com particular ênfase num modelo estocástico que descreve as perturbações aleatórias no crescimento. O problema de estimação é tratado na secção 3, para uma trajectória, e na secção 4 para o caso de várias trajectórias. A estimação dos parâmetros é também estudada utilizando métodos bootstrap, paramétrico e não-paramétrico, na secção 5. Esta abordagem poderá ser útil para obter a distribuição dos estimadores quando trabalhamos com amostras de pequena dimensão.

Os resultados e métodos são ilustrados utilizando dados de bovinos mertolengos de estirpe rosilho criados na região de Serpa, na margem esquerda do rio Guadiana. Os animais foram criados juntamente com as mães, em pastoreio, até ao desmame e posteriormente suplementados com silagens durante os períodos de escassez de pastagem, o período de Outono e Inverno.

2 Modelos de crescimento individual

Os modelos que têm sido utilizados para descrever o crescimento individual de um animal, em termos do seu tamanho $X(t)$ no instante t , correspondem a uma equação diferencial da forma

$$dY(t) = b(A - Y(t)) dt, \quad Y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

onde $Y(t) = g(X(t))$, com g uma função estritamente crescente. Representando por x_0 o tamanho à nascença temos $y_0 = g(x_0)$. Quanto aos parâmetros A e b , temos $A = g(a)$, onde a é o tamanho assintótico ou tamanho na maturidade do indivíduo, e $b > 0$ é o coeficiente de crescimento ou taxa de aproximação à maturidade.

O primeiro modelo de crescimento especificamente designado para descrever o crescimento individual foi o *modelo de Bertalanffy-Richards*, proposto por von Bertalanffy (1957) e também estudado por Richards (1959), corresponde a $g(x) = x^c$ para $c > 0$. Este modelo inclui como casos especiais alguns modelos bem conhecidos. É o que acontece no caso $c = 1$ em que temos o *modelo de Mitscherlich*, o modelo mais simples, particularmente utilizado para descrever medidas lineares como o comprimento ou a altura (exemplo de aplicação a agricultura em Goldsworthy e Colegrove (1974)). Se trabalharmos com o volume ou o peso é natural a escolha $c = 1/3$, tornando $Y(t)$ em algo semelhante a um comprimento. Em Filipe, Braumann e Roquete (2007) estudámos estas e outras escolhas para o valor de c incluindo o caso em que este valor, sendo desconhecido

à partida, era, portanto, mais um parâmetro do modelo a estimar. O *modelo de Gompertz* ($g(x) = \ln x$) pode considerar-se o caso limite do modelo de Bertalanffy-Richards com $c = 0$.

Se pretendermos incluir o efeito das flutuações aleatórias do ambiente no processo de crescimento, é natural considerar o *modelo de equações diferenciais estocásticas*

$$dY(t) = b(A - Y(t))dt + \sigma dW(t), \quad Y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

onde $W(t)$ é um processo de Wiener padrão e σ mede a intensidade das flutuações aleatórias do ambiente sobre o crescimento. Garcia (1983) aplicou este modelo ao crescimento de árvores. A solução de (2) é um processo de difusão ergódico com coeficiente de tendência $\mu(y) = b(A - y)$ e coeficiente de difusão $\sigma^2(y) = \sigma^2$. A solução desta equação diferencial estocástica é dada por

$$Y(t) = A + e^{-bt}(y_0 - A) + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dW(s). \quad (3)$$

(ver, por exemplo, Braumann (2005)). A distribuição de $Y(t)$ é normal de média $A + e^{-bt}(y_0 - A)$ e variância $\frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt})$. A distribuição assintótica é normal de média A e variância $\frac{\sigma^2}{2b}$.

Em Filipe, Braumann e Roquete(2007), considerámos, para uma trajectória, os problemas de estimação de parâmetros e previsão de tamanhos futuros de um indivíduo para o modelo (2). Apresentamos na secção seguinte uma breve revisão da parte de estimação.

3 Estimação de parâmetros para uma trajectória

Vamos supor que observamos o peso de um animal nos instantes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, designar o peso do animal observado no instante t_k ($k = 1, 2, \dots, n$) por $X_k = X(t_k)$ e considerar $Y_k = Y(t_k) = g(X(t_k))$. Seja $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o vector de observações de $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ e $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, com $y_k = g(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Assumimos que g é uma função conhecida. Pretendemos estimar o vector dos parâmetros $\mathbf{p} = (A, b, \sigma)$.

A partir de (3) podemos ver que, para $k = 1, 2, \dots, n$,

$$Y_k = A + e^{-b(t_k - t_{k-1})}(y_{k-1} - A) + \sigma e^{-bt_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{bs} dW_s.$$

Portanto, condicionado a se ter $Y_{k-1} = y_{k-1}$, a função densidade de probabilidade (f.d.p.) de Y_k é

$$f_{Y_k|Y_{k-1}=y_{k-1}}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2b}(1 - E_k^2)}} \exp \left\{ -\frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)E_k)^2}{2 \frac{\sigma^2}{2b}(1 - E_k^2)} \right\}, \quad (4)$$

4 Filipe, Braumann e Roquete/Crescimento em ambiente aleatório

onde $E_k = e^{-b(t_k - t_{k-1})}$. Como $Y(t)$ é um processo de Markov, a função densidade conjunta de Y_1, \dots, Y_n , dado $Y_0 = y_0$ (que se assume conhecido), é o produto destas f.d.p e a função de log-verosimilhança em termos de Y é dada por

$$L_Y(\mathbf{p}) = -\frac{n}{2} \ln \left(\frac{2\pi\sigma^2}{2b} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(1 - E_k^2) \quad (5)$$

$$-\frac{b}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A) E_k)^2}{1 - E_k^2}.$$

Em termos de X a função de log-verosimilhança é

$$L_X(\mathbf{p}) = L_Y(\mathbf{p}) + \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{dY}{dX} \Big|_{x=x_k} \right).$$

O *estimador de máxima verosimilhança*, $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{A}, \hat{b}, \hat{\sigma})$, foi obtido por maximização de L_Y (equivale a maximizar L_X), através de técnicas numéricas com recurso ao software estatístico S-PLUS (utilizámos a rotina nlminb). Os estimadores são assintoticamente normais com média \mathbf{p} e matriz de variâncias-covariâncias $\mathbf{V} = \mathbf{F}^{-1}$, onde \mathbf{F} é a matriz de informação de Fisher em que os elementos são dados por $\mathbf{F}_{i,j} = -E [\partial^2 L_Y / \partial p_i \partial p_j]$. As expressões de $\mathbf{F}_{i,j}$ podem ser calculadas explicitamente utilizando as propriedades do processo $Y(t)$. Ao substituir \mathbf{p} por $\hat{\mathbf{p}}$ nestas expressões podemos estimar \mathbf{F} , e consequentemente \mathbf{V} , permitindo assim construir intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros.

Em Filipe, Braumann e Roquete (2007), aplicámos o modelo de Bertalanffy-Richards estocástico ao peso (em Kg) de um bovino para o qual tínhamos 79 observações desde a nascença até por volta dos 5 anos. Considerámos os casos particulares $c = 1$, $c = 0$, $c = 1/3$ e c desconhecido. O caso $c = 1$, correspondente ao modelo de Mitscherlich não se revelou muito eficaz, como seria de esperar visto que não será o melhor modelo a utilizar quando trabalhamos com o peso. O caso em que desconhecíamos c e portanto era mais um parâmetro a estimar não revelou melhorias significativas relativamente aos casos $c = 0$ e $c = 1/3$. Assim, prosseguimos com a aplicação destes últimos modelos aos dados.

Em Filipe, Braumann e Roquete (2007) também estudámos o ajustamento destes modelos em termos da sua capacidade de prever pesos futuros do animal em estudo.

4 Estimação de parâmetros para várias trajectórias independentes

Consideremos agora a situação em que temos dados do peso de vários animais, do mesmo tipo e criados em condições semelhantes, medidos em diferentes instantes. Vamos supor que temos m animais, o peso do animal número j ($j = 1, 2, \dots, m$) é observado nos instantes $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \dots < t_{j,n_j}$, e designado, respectivamente, por $X_{j,0} = X(t_{j,0})$, $X_{j,1} = X(t_{j,1})$, ..., $X_{j,n_j} = X(t_{j,n_j})$. Temos $Y_{j,k} = Y(t_{j,k}) = g(X_{j,k})$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n_j$). Seja $\mathbf{x}_j = (x_{j,0}, x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j})$ o vector dos valores observados de $\mathbf{X}_j = (X_{j,0}, X_{j,1}, \dots, X_{j,n_j})$ e seja $\mathbf{y}_j = (y_{j,0}, y_{j,1}, \dots, y_{j,n_j})$, com $y_{j,k} = g(x_{j,k})$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n_j$) o vector dos valores observados de $\mathbf{Y}_j = (Y_{j,0}, Y_{j,1}, \dots, Y_{j,n_j})$. Assumimos que a função g é conhecida.

Para o animal número j podemos obter a função de máxima verosimilhança L_{Y_j} como em (5)

$$L_{Y_j}(\mathbf{p}) = -\frac{n_j}{2} \ln \left(\frac{2\pi\sigma^2}{2b} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_j} \ln (1 - E_{jk}^2) \quad (6)$$

$$- \frac{b}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(y_{jk} - A - (y_{j,k-1} - A) E_{jk})^2}{1 - E_{jk}^2},$$

com $E_{jk} = e^{-b(t_{jk} - t_{j,k-1})}$. Admitindo independência entre o peso dos diferentes animais, existe independência entre as trajectórias e a função de log-verosimilhança global para os m animais é

$$L_{Y_1, Y_2, \dots, Y_m}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n_j} L_{Y_j}(\mathbf{p}) \quad (7)$$

O *estimador de máxima verosimilhança* $\hat{\mathbf{p}}$ é obtido maximizando L_{Y_1, Y_2, \dots, Y_m} . Os estimadores são assintoticamente normais de média \mathbf{p} e matriz de variâncias-covariâncias $\mathbf{V} = \mathbf{F}^{-1}$. A matriz de informação de Fisher é agora a soma das matrizes de informação de Fisher das trajectórias individuais, cujas expressões já conhecemos. Substituindo \mathbf{p} por $\hat{\mathbf{p}}$, podemos obter uma estimativa de \mathbf{V} , tal como anteriormente, e calcular intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros.

Aplicámos o procedimento para o modelo Bertalanffy-Richards estocástico, para os casos particulares $c = 0$ e $c = 1/3$, aos dados de $m = 5$ animais da mesma raça criados sob condições similares. Um destes animais corresponde ao considerado na secção anterior (com 79 observações) e os outros quatro animais têm 38 observações cada (figura 1).

As matrizes de variâncias-covariâncias obtidas foram

$$\mathbf{V}_{c=0} = \begin{bmatrix} 0.00201 & -0.00257 & -0.00002 \\ -0.00257 & 0.00965 & 0.00008 \\ -0.00002 & 0.00008 & 0.00014 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_{c=1/3} = \begin{bmatrix} 555.65 & -1.7451 & -0.0311 \\ -1.7451 & 0.0115 & 0.0002 \\ -0.0311 & 0.0002 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

6 Filipe, Braumann e Roquete/Crescimento em ambiente aleatório

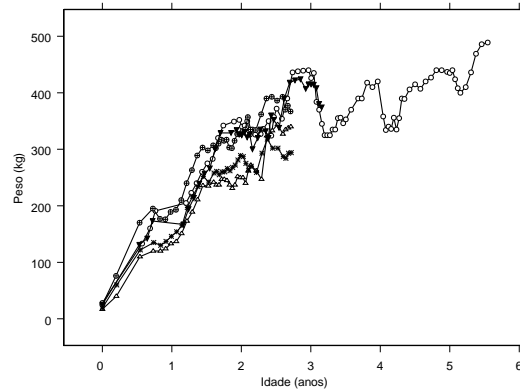


Figura 1: Curvas da evolução do peso observadas para os 5 animais.

Na Tabela 1 encontramos as estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros, e o correspondente valor da função log-verosimilhança; assim como os intervalos de confiança a 95% assintóticos.

Tabela 1: Estimativas de máxima verosimilhança e intervalos de confiança a 95% aproximados.

| | a | b | σ | L_{X_1, \dots, X_5} |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| $c = 0$ (Gompertz) | 352.4 ± 28.3 | 1.708 ± 0.193 | 0.253 ± 0.023 | -958.84 |
| $c = 1/3$ | 384.1 ± 46.2 | 1.147 ± 0.211 | 0.506 ± 0.047 | -941.85 |

5 Métodos bootstrap

Em Efron e Tibshirani (1993) podemos encontrar dois tipos de procedimento bootstrap, respectivamente, *bootstrap paramétrico* e *bootstrap não-paramétrico*. O bootstrap não-paramétrico baseia-se no facto de considerarmos a distribuição empírica discreta gerada por uma amostra aleatória de dimensão n de uma distribuição desconhecida F . Esta distribuição empírica \hat{F}_n atribui igual probabilidade a cada elemento da amostra. No bootstrap paramétrico consideramos F como sendo um membro de uma família conhecida e obtemos \hat{F}_n estimando os parâmetros da família a partir dos dados. Em ambos os casos, ao gerar uma sucessão aleatória i.i.d., podemos obter novas estimativas dos vários parâmetros

ou características não-paramétricas da distribuição original F .

No nosso caso, temos de ter atenção, pois trabalhamos com amostras de dados em que existe dependência, uma vez que uma amostra apresenta a evolução do peso de um animal.

Aplicámos a metodologia bootstrap para os casos $c = 0$ e $c = 1/3$, utilizando os dados do peso de um animal (uma trajectória) e os dados do peso de cinco animais (várias trajectórias).

5.1 Bootstrap paramétrico

Tendo em conta (4), gerámos 1000 "amostras" independentes, $\mathbf{y}^{*1}, \mathbf{y}^{*2}, \dots, \mathbf{y}^{*1000}$, onde $\mathbf{y}^{*i} = (y_0^{*i}, y_1^{*i}, \dots, y_n^{*i})$ ($i = 1, \dots, 1000$) usando como aproximação de $\mathbf{p} = (A, b, \sigma)$ os estimadores de máxima verosimilhança $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{A}, \hat{b}, \hat{\sigma})$. Para cada uma destas "amostras" calculámos (como descrito na secção 3) as estimativas \mathbf{p}^{*i} ($i = 1, \dots, 1000$), e consequentemente, através do cálculo da média destas estimativas, obtivemos a estimativa bootstrap do vector dos parâmetros. Os intervalos de confiança bootstrap padrão, para cada um dos elementos do vector \mathbf{p} , foram construídos usando a normalidade e o cálculo do desvio-padrão das estimativas das 1000 réplicas. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 2: Estimativas bootstrap e intervalos de confiança a 95% (um animal $n = 79$).

| | a | b | σ |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $c = 0$ (Gompertz) | 405.3 ± 59.5 | 1.517 ± 0.376 | 0.222 ± 0.036 |
| $c = 1/3$ | 418.3 ± 84.1 | 1.180 ± 0.466 | 0.516 ± 0.085 |

Também poderíamos construir intervalos de confiança bootstrap usando os quantis empíricos 2,5% e 97,5% das 1000 réplicas, mas os resultados obtidos foram praticamente idênticos.

Na extensão a m trajectórias, gerámos $\mathbf{y}_j^{*i} = (y_{j,0}^{*i}, y_{j,1}^{*i}, \dots, y_{j,n_j}^{*i})$ ($i = 1, \dots, 1000$; $j = 1, \dots, m$) usando, agora, como aproximação de $\mathbf{p} = (A, b, \sigma)$ os estimadores de máxima verosimilhança globais, $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{A}, \hat{b}, \hat{\sigma})$, que encontramos na secção 4. No caso dos $m = 5$ animais, obtivemos, para cada $i=1, \dots, 1000$, usando as "amostras" \mathbf{y}_j^{*i} ($j = 1, \dots, m$), a estimativa de máxima verosimilhança \mathbf{p}^{*i} seguindo a metodologia indicada na secção 4. A partir das 1000 réplicas \mathbf{p}^{*i} ($i = 1, \dots, 1000$), a técnica é semelhante ao caso de um único animal. A Tabela 3 apresenta as estimativas bootstrap e os intervalos de confiança bootstrap para os dados dos $m = 5$ animais.

8 Filipe, Braumann e Roquete/Crescimento em ambiente aleatório

Tabela 3: Estimativas bootstrap e intervalos de confiança a 95% (cinco animais $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 38$ e $n_5 = 79$).

| | a | b | σ |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $c = 0$ (Gompertz) | 352.4 ± 31.4 | 1.714 ± 0.184 | 0.252 ± 0.024 |
| $c = 1/3$ | 384.9 ± 46.7 | 1.159 ± 0.210 | 0.504 ± 0.047 |

5.2 Bootstrap não-paramétrico

Efron e Tibshirani (1993) apresenta o procedimento a seguir no caso em que trabalhamos com uma amostra em que existe dependência entre as observações. Para a forma geral do nosso modelo verificamos que

$$e_k = \frac{e^{t_k} Y_k - e^{t_{k-1}} Y_{k-1} - A(e^{t_k} - e^{t_{k-1}})}{\sqrt{\frac{\sigma^2(e^{2t_k} - e^{2t_{k-1}})}{2b}}}, k = 1, \dots, n, \quad (8)$$

são i.i.d com distribuição normal padrão. Obtivemos 1000 réplicas independentes, $\mathbf{e}^{*1}, \mathbf{e}^{*2}, \dots, \mathbf{e}^{*1000}$, onde $\mathbf{e}^{*i} = (e_0^{*i}, e_1^{*i}, \dots, e_n^{*i})$ ($i = 1, \dots, 1000$) e onde os e_k^{*i} ($k = 1, \dots, n; i = 1, \dots, 1000$) são obtidos por amostragem com reposição da distribuição empírica dos valores observados de e_1, \dots, e_n . Para cada $i=1, \dots, 1000$, usamos \mathbf{e}^{*i} para reconstruir, usando a expressão (8) em sentido inverso, um vector de n observações \mathbf{y}^{*i} . Usando $\mathbf{y}^{*1}, \mathbf{y}^{*2}, \dots, \mathbf{y}^{*1000}$, obtivemos as estimativas bootstrap dos parâmetros e intervalos de confiança bootstrap como na secção 5.1 (ver Tabela 4).

Tabela 4: Estimativas bootstrap e intervalos de confiança a 95% (um animal $n = 79$).

| | a | b | σ |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $c = 0$ (Gompertz) | 404.8 ± 59.5 | 1.519 ± 0.371 | 0.223 ± 0.043 |
| $c = 1/3$ | 419.1 ± 80.3 | 1.179 ± 0.453 | 0.518 ± 0.097 |

Para m trajectórias, temos

$$e_{jk} = \frac{e^{t_{jk}} Y_{jk} - e^{t_{j,k-1}} Y_{j,k-1} - A(e^{t_{jk}} - e^{t_{j,k-1}})}{\sqrt{\frac{\sigma^2(e^{2t_{jk}} - e^{2t_{j,k-1}})}{2b}}}, j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n_j, \quad (9)$$

i.i.d com distribuição normal padrão. Para cada trajectória procedemos como descrito acima, utilizando os estimadores de máxima verosimilhança obtidos na secção 4. Os resultados obtidos para 5 animais estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Estimativas bootstrap e intervalos de confiança a 95% (cinco animais $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 38$ e $n_5 = 79$).

| | a | b | σ |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $c = 0$ (Gompertz) | 362.2 ± 31.4 | 1.630 ± 0.189 | 0.250 ± 0.031 |
| $c = 1/3$ | 392.5 ± 50.8 | 1.094 ± 0.201 | 0.501 ± 0.057 |

6 Considerações finais

Em trabalho futuro pretendemos encontrar um modelo de crescimento individual, em ambiente aleatório, mais geral do ponto de vista analítico, aplicar outros métodos de estimação e considerar o caso, mais realista, em que o tamanho assintótico esperado é diferente para diferentes indivíduos.

Agradecimentos

Os dois primeiros autores são membros do CIMA-UE e o terceiro autor é membro do ICAM-UE, centros de investigação financiados pelo Programa de Financiamento Plurianual da Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PTDC/MAT/64297/2006.

Referências

- [1] Bertalanffy, L. von (1957). Quantitative laws in metabolism and growth, *The Quarterly Review of Biology*, Vol. 34, n. 3, 786-795.
- [2] Braumann, C. A. (2005). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*. Edições SPE.
- [3] Efron, B. e Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall.
- [4] Filipe, P. A., Braumann C. A. e Roquete, C. J. (2007). Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório, Em *Actas do XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, (Ferrão, M. E., Nunes C., Braumann, C. A., eds.), 401-410. Edições SPE.
- [5] Garcia, O., (1983). A stochastic differential equation model for the height of forest stands, *Biometrics*, Vol. 39, 1059-1072.
- [6] Goldsworthy, P. e Colegrove, M. (1974). Growth and yield of highland maize in Mexico. *Journal of Agriculture Science*, Vol. 83, 213-221.
- [7] Oliveira, H., Lôbo, R. e Pereira C. (2000). Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá, *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Vol. 35, 1843-1851.
- [8] Richards, F. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, Vol. 10, 290-300.